

**Θέμα 1.** [1 μον.] Δίνεται το σύνολο  $A = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x \leq 2023\}$ . Να δείξετε ότι το σύνολο  $A$  δεν έχει μέγιστο στοιχείο καθώς και ότι  $\sup A = 2023$ . [Υπόδειξη: Είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς (αφού πρώτα τη διατυπώσετε).]

**Θέμα 2.** (α) [1 μον.] Να δείξετε, αποκλειστικά με χρήση του ορισμού, ότι η ακολουθία  $a_n = 3 + \frac{9}{\sqrt[n]{n}}$  συγκλίνει στον αριθμό 3.

(β) [1 μον.] Δίνεται η ακολουθία  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  με  $\beta_1 = 1$  και  $\beta_{n+1} = -3 + \sqrt{23 + \beta_n}$ . Να δείξετε ότι η  $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$  είναι συγκλίνουσα και να υπολογίσετε το όριό της [Υπόδειξη: Να ξεκινήστε δείχνοντας ότι είναι αύξουσα και άνω φραγμένη].

(γ) [1 μον.] Να εξεταστούν ως προς τη σύγκλιση οι παρακάτω ακολουθίες

$$\gamma_n = \sqrt[n]{3^n + 9 \cdot 5^n + 8^n}, \quad \delta_n = (-1)^n + \frac{3}{n}.$$

**Θέμα 3.** Έστω  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  δύο συνεχείς συναρτήσεις και  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$  είναι συνεχής στο  $x_0$  ως εξής:

(α) [1 μον.] Με χρήση του  $\varepsilon - \delta$  ορισμού.

(β) [1 μον.] Με χρήση του χαρακτηρισμού της συνέχειας με ακολουθίες (αρχή μεταφοράς).

**Θέμα 4.** (Α) [1 μον.] Έστω  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής για την οποία ισχύει ότι  $|f(x)| = 10$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ . Να δείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή.

(Β) Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει  $-2 < f(x) < 0$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ . Να δείξετε ότι:

(α) [0,7 μον.] Υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$  ώστε  $3\xi = -f(\xi)$ .

(β) [0,8 μον.] Υπάρχει  $\theta > 0$  ώστε να ισχύει  $f(x) + 3x + 2 \geq \theta$  για κάθε  $x \in [0, 1]$ .

**Θέμα 5.** [2 μον.] Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ . Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  (μονοτονία, ακρότατα, κυρτότητα, σημεία καμπής, οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες, σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες) και να σχεδιάσετε την γραφική της παράσταση. [Σημείωση: Με  $\log x$  συμβολίζεται ο νεπέριος λογάριθμος του  $q$ .]

**Θέμα 6.** [1 μον.] Δίνεται  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει  $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^2}$  για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ . Να δείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(2x) - f(x)) = 0$ .

**Καλή επιτυχία!**